

```
In[1]:= SetDirectory["~/Factorisation"];
      << kappaLib.m
      << helper.m
```

KappaLib v1.1

Loading helper.m..

■ Metaclass V:

```
In[4]:= vars = {x0, x1, x2, x3};
```

```
In[5]:= kappa = emMatrixToKappa [
      (
      a1 -b1  0  0  0  0
      b1  a1  0  0  0  0
      0   0  a2  0  0  a3
      0   1  0  a1 b1  0
      1   0  0 -b1 a1  0
      0   0  a3  0  0  a2
      )
      ];
```

```
In[6]:= vars = {x0, x1, x2, x3};
      fr = emKappaToFresnel[kappa, vars];
```

- We may assume that $a_3 \neq 0$. If $a_3=0$, then the Fresnel surface contains the 3-dimensional linear subspace $(0, x_1, x_2, x_3)$

```
In[8]:= FullSimplify[fr /. {a3 -> 0, x0 -> 0}]
```

Out[8]= 0

- We assume that the Fresnel polynomial factorises:

```
In[9]:= A = Table[ToExpression["A" <> ToString[Min[{i, j}]] <> ToString[Max[{i, j}]]],
      {i, 0, 3}, {j, 0, 3}];
      B = Table[ToExpression["B" <> ToString[Min[{i, j}]] <> ToString[Max[{i, j}]]],
      {i, 0, 3}, {j, 0, 3}];
      A // MatrixForm
      B // MatrixForm
      factorised = (vars.A.vars) (vars.B.vars);
```

Out[11]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{01} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{02} & A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{03} & A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Out[12]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} & B_{03} \\ B_{01} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{02} & B_{12} & B_{22} & B_{23} \\ B_{03} & B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{pmatrix}$$

```
In[14]:= cons = Union[Flatten[CoefficientList[fr - factorised, vars]]];
```

```
In[15]:= cons = simp[cons];
show [cons]
```

Out[16]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix}
 1 & : & 0 \\
 2 & : & -A33 B33 \\
 3 & : & -a3 - A00 B00 \\
 4 & : & -a3 b1^2 - A11 B11 \\
 5 & : & -a3 b1^2 - A22 B22 \\
 6 & : & -2 (A01 B00 + A00 B01) \\
 7 & : & -2 (A02 B00 + A00 B02) \\
 8 & : & -2 (A03 B00 + A00 B03) \\
 9 & : & -2 (A11 B01 + A01 B11) \\
 10 & : & -2 (A12 B11 + A11 B12) \\
 11 & : & -2 (A13 B11 + A11 B13) \\
 12 & : & -2 (A22 B02 + A02 B22) \\
 13 & : & -2 (A22 B12 + A12 B22) \\
 14 & : & -2 (A23 B22 + A22 B23) \\
 15 & : & -2 (A33 B03 + A03 B33) \\
 16 & : & -2 (A33 B13 + A13 B33) \\
 17 & : & -2 (A33 B23 + A23 B33) \\
 18 & : & -A33 B11 - 4 A13 B13 - A11 B33 \\
 19 & : & -A33 B22 - 4 A23 B23 - A22 B33 \\
 20 & : & -2 a3 b1^2 - A22 B11 - 4 A12 B12 - A11 B22 \\
 21 & : & -A33 B00 - 4 A03 B03 + 4 a3 b1^2 - A00 B33 \\
 22 & : & -2 (2 A12 B01 + A11 B02 + A02 B11 + 2 A01 B12) \\
 23 & : & -2 (A13 B00 + 2 A03 B01 + 2 A01 B03 + A00 B13) \\
 24 & : & -2 (A22 B01 + 2 A12 B02 + 2 A02 B12 + A01 B22) \\
 25 & : & -2 (A23 B00 + 2 A03 B02 + 2 A02 B03 + A00 B23) \\
 26 & : & -2 (A23 B11 + 2 A13 B12 + 2 A12 B13 + A11 B23) \\
 27 & : & -2 (2 A23 B12 + A22 B13 + A13 B22 + 2 A12 B23) \\
 28 & : & -2 (A33 B01 + 2 A13 B03 + 2 A03 B13 + A01 B33) \\
 29 & : & -2 (A33 B02 + 2 A23 B03 + 2 A03 B23 + A02 B33) \\
 30 & : & -2 (A33 B12 + 2 A23 B13 + 2 A13 B23 + A12 B33) \\
 31 & : & -A11 B00 - 4 A01 B01 + 2 a1 b1 - 2 a2 b1 - A00 B11 \\
 32 & : & -A22 B00 - 4 A02 B02 - 2 a1 b1 + 2 a2 b1 - A00 B22 \\
 33 & : & -4 (A23 B01 + A13 B02 + A12 B03 + A03 B12 + A02 B13 + A01 B23) \\
 34 & : & -2 \left((a1 - a2)^2 - a3^2 + A12 B00 + 2 A02 B01 + 2 A01 B02 - b1^2 + A00 B12 \right) \\
 35 & : & -2 \left(2 A13 B01 + A11 B03 + b1 \left((a1 - a2)^2 - a3^2 + b1^2 \right) + A03 B11 + 2 A01 B13 \right) \\
 36 & : & -2 \left(2 A23 B02 + A22 B03 + b1 \left((a1 - a2)^2 - a3^2 + b1^2 \right) + A03 B22 + 2 A02 B23 \right)
 \end{pmatrix}$$

■ Equation (3) and $a3 \neq 0$: We may assume that $A00 = 1$.

```
In[17]:= sub = {A00 → 1, B00 → -a3};
```

```
In[18]:= cons = simp[cons //. sub];
show [cons]
```

```
Out[19]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 : & 0 \\ 2 : & -A33 B33 \\ 3 : & 2 A01 a3 - 2 B01 \\ 4 : & 2 A02 a3 - 2 B02 \\ 5 : & 2 A03 a3 - 2 B03 \\ 6 : & -a3 b1^2 - A11 B11 \\ 7 : & -a3 b1^2 - A22 B22 \\ 8 : & -2 (A11 B01 + A01 B11) \\ 9 : & -2 (A12 B11 + A11 B12) \\ 10 : & -2 (A13 B11 + A11 B13) \\ 11 : & -2 (A22 B02 + A02 B22) \\ 12 : & -2 (A22 B12 + A12 B22) \\ 13 : & -2 (A23 B22 + A22 B23) \\ 14 : & -2 (A33 B03 + A03 B33) \\ 15 : & -2 (A33 B13 + A13 B33) \\ 16 : & -2 (A33 B23 + A23 B33) \\ 17 : & -A33 B11 - 4 A13 B13 - A11 B33 \\ 18 : & -A33 B22 - 4 A23 B23 - A22 B33 \\ 19 : & -4 A03 B03 + a3 (A33 + 4 b1^2) - B33 \\ 20 : & -2 a3 b1^2 - A22 B11 - 4 A12 B12 - A11 B22 \\ 21 : & A11 a3 - 4 A01 B01 + 2 a1 b1 - 2 a2 b1 - B11 \\ 22 : & -2 (-A13 a3 + 2 A03 B01 + 2 A01 B03 + B13) \\ 23 : & A22 a3 - 4 A02 B02 - 2 a1 b1 + 2 a2 b1 - B22 \\ 24 : & -2 (-A23 a3 + 2 A03 B02 + 2 A02 B03 + B23) \\ 25 : & -2 (2 A12 B01 + A11 B02 + A02 B11 + 2 A01 B12) \\ 26 : & -2 (A22 B01 + 2 A12 B02 + 2 A02 B12 + A01 B22) \\ 27 : & -2 (A23 B11 + 2 A13 B12 + 2 A12 B13 + A11 B23) \\ 28 : & -2 (2 A23 B12 + A22 B13 + A13 B22 + 2 A12 B23) \\ 29 : & -2 (A33 B01 + 2 A13 B03 + 2 A03 B13 + A01 B33) \\ 30 : & -2 (A33 B02 + 2 A23 B03 + 2 A03 B23 + A02 B33) \\ 31 : & -2 (A33 B12 + 2 A23 B13 + 2 A13 B23 + A12 B33) \\ 32 : & -4 (A23 B01 + A13 B02 + A12 B03 + A03 B12 + A02 B13 + A01 B23) \\ 33 : & -2 ((a1 - a2)^2 - a3 (A12 + a3) + 2 A02 B01 + 2 A01 B02 - b1^2 + B12) \\ 34 : & -2 (2 A13 B01 + A11 B03 + b1 ((a1 - a2)^2 - a3^2 + b1^2) + A03 B11 + 2 A01 B13) \\ 35 : & -2 (2 A23 B02 + A22 B03 + b1 ((a1 - a2)^2 - a3^2 + b1^2) + A03 B22 + 2 A02 B23) \end{pmatrix}$$

```
In[20]:= tmp = Join[Take[cons, {3, 5}], {cons[[19]]}, Take[cons, {21, 24}], {cons[[33]]}];
tmp // MatrixForm
```

```
Out[21]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 2 A01 a3 - 2 B01 \\ 2 A02 a3 - 2 B02 \\ 2 A03 a3 - 2 B03 \\ -4 A03 B03 + a3 (A33 + 4 b1^2) - B33 \\ A11 a3 - 4 A01 B01 + 2 a1 b1 - 2 a2 b1 - B11 \\ -2 (-A13 a3 + 2 A03 B01 + 2 A01 B03 + B13) \\ A22 a3 - 4 A02 B02 - 2 a1 b1 + 2 a2 b1 - B22 \\ -2 (-A23 a3 + 2 A03 B02 + 2 A02 B03 + B23) \\ -2 ((a1 - a2)^2 - a3 (A12 + a3) + 2 A02 B01 + 2 A01 B02 - b1^2 + B12) \end{pmatrix}$$

```
In[22]:= sol = Solve[toEqs[tmp], {B01, B02, B03, B33, B11, B13, B22, B23, B12}]
```

```
Out[22]= {{B01 -> A01 a3, B02 -> A02 a3, B03 -> A03 a3, B33 -> -4 A03^2 a3 + a3 A33 + 4 a3 b1^2,
  B11 -> -4 A01^2 a3 + A11 a3 + 2 a1 b1 - 2 a2 b1, B13 -> -4 A01 A03 a3 + A13 a3,
  B22 -> -4 A02^2 a3 + A22 a3 - 2 a1 b1 + 2 a2 b1, B23 -> -4 A02 A03 a3 + A23 a3,
  B12 -> -a1^2 + 2 a1 a2 - a2^2 - 4 A01 A02 a3 + A12 a3 + a3^2 + b1^2}}
```

```
In[23]:= sub = Join[sub, %[[1]]]
```

```
Out[23]= {A00 -> 1, B00 -> -a3, B01 -> A01 a3, B02 -> A02 a3, B03 -> A03 a3,
  B33 -> -4 A03^2 a3 + a3 A33 + 4 a3 b1^2, B11 -> -4 A01^2 a3 + A11 a3 + 2 a1 b1 - 2 a2 b1,
  B13 -> -4 A01 A03 a3 + A13 a3, B22 -> -4 A02^2 a3 + A22 a3 - 2 a1 b1 + 2 a2 b1,
  B23 -> -4 A02 A03 a3 + A23 a3, B12 -> -a1^2 + 2 a1 a2 - a2^2 - 4 A01 A02 a3 + A12 a3 + a3^2 + b1^2}
```

```
In[24]:= cons = simp[cons //. sub];
show [cons]
```

```
Out[25]//MatrixForm=
```

1 :		0
2 :		4 A03 a3 (2 A03^2 - A33 -
3 :		- a3 A33 (-4 A03^2 + A33
4 :		4 A02 (2 A02^2 a3 - A22 a3 + (
5 :		4 A01 (2 A01^2 a3 - A11 a3 + (
6 :		4 a3 (-2 A03 A13 + A01 (6 A03^2
7 :		4 a3 (-2 A03 A23 + A02 (6 A03^2
8 :		(4 A02^2 - A22) A22 a3 + 2 (a1 - a2
9 :		(4 A01^2 - A11) A11 a3 + 2 A11 (-a
10 :		4 a3 (2 A03^2 A13 + 2 A01 A03 A33 -
11 :		4 a3 (2 A03^2 A23 + 2 A02 A03 A33 -
12 :		8 A01 A03 A11 a3 + 8 A01^2 A13 a3 - 4 A13
13 :		8 A02 A03 A22 a3 + 8 A02^2 A23 a3 - 4 A23
14 :		- 4 (2 (A02 A13 + A01 A23) a3 + A03 (- (a1 - a2)^2 + a
15 :		4 (6 A01 A02^2 a3 - A01 (A22 a3 + (-a1 + a2) b1) + A02
16 :		- 4 (-6 A01^2 A02 a3 + A02 (A11 a3 + (a1 - a2) b1) + A02
17 :		- 2 (-12 A01^2 A03 a3 + 2 A03 A11 a3 + 4 A01 A13 a3 + ((a1
18 :		- 2 (-12 A02^2 A03 a3 + 2 A03 A22 a3 + 4 A02 A23 a3 + ((a1
19 :		2 a3 (2 A03^2 A22 + 8 A02 A03 A23 - 2 A23^2 + 2 A02^2 A33 - A2
20 :		2 a3 (2 A03^2 A11 + 8 A01 A03 A13 - 2 A13^2 + 2 A01^2 A33 - A1
21 :		- 2 (A12 (-4 A02^2 a3 + A22 a3 + 2 (-a1 + a2) b1) + A22 (- (a
22 :		- 2 (-a1^2 A11 + 2 a1 (A11 a2 + A12 b1) - 2 A12 (2 A01^2 a3 + a2 b1)
23 :		2 (4 A03^2 A12 a3 + 8 A03 (A02 A13 + A01 A23) a3 + (a1 - a2)^2 A33 - a3 (4 A13
24 :		4 ((4 A02 A03 A12 + 2 A02^2 A13 + 2 A01 A03 A22 - A13 A22) a3 + A23 ((a1 - a2)
25 :		4 (a1^2 A13 + (2 A02 A03 A11 + 4 A01 A03 A12 + 2 A01^2 A23 - A11 A23) a3 + a2 A23 b1 - a1
26 :		2 (2 a1^2 A12 - 4 a1 A12 a2 + 2 A12 a2^2 + 2 A02^2 A11 a3 + 8 A01 A02 A12 a3 - 2 A12^2 a3 + 2 A01^2

```
In[31]:= elimVars = Variables[A]
condVars = Variables[kappa]
Variables[cons]
```

```
Out[31]= {A00, A01, A02, A03, A11, A12, A13, A22, A23, A33}
```

```
Out[32]= {a1, a2, a3, b1}
```

```
Out[33]= {A01, A02, A03, a1, A11, A12, A13, a2, A22, A23, a3, A33, b1}
```

```
In[28]:= gb = GroebnerBasis[cons, condVars, elimVars]; // Timing
```

```
Out[28]= {206.41, Null}
```

```
In[29]:= show[simp[gb]]
```

```
Out[29]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & : & a^3 b^5 (a^3 + b^2)^3 \\ 2 & : & (a - a2) a^3 b^5 (a^3 + b^2) \\ 3 & : & (a - a2) b^5 ((a - a2)^2 + a^3 + b^2) \\ 4 & : & (a - a2) b^2 (((a - a2)^2 - a^3)^2 - b^4) \\ 5 & : & (a - a2) a^3 b^4 ((a - a2)^2 - a^3 - b^2) \\ 6 & : & a^3 (5 (a - a2)^2 + a^3) b^5 + ((a - a2)^2 + 2 a^3) b^7 + b^9 \\ 7 & : & b^5 (5 a^6 + 14 a^4 b^2 + 13 a^3 b^4 + 4 b^4 ((a - a2)^2 + b^2) \\ 8 & : & - b^4 ((a - a2)^2 a^4 + a^6 + 3 a^3 b^2 + ((a - a2)^2 + 3 a^3) b^4 \\ 9 & : & 3 a^3 ((a - a2)^2 - a^3)^2 b^2 - 8 a^3 ((a - a2)^2 - a^3) b^4 + (2 (a - a2)^2 + \\ 10 & : & b^2 ((a - a2)^2 - a^3 + b^2) ((a - a2)^2 + a^3 + 2 (a - a2) b^2) ((a - a2)^2 + \\ 11 & : & - b^4 (-3 a^4 + 12 a^3 a2 - 3 a^2 a^4 + 2 a^2 (a3 - b1) (a3 + b1) + 4 a1 a2 (3 a^2 - a^3 + b^2) - 2 a^2$$

```

■ Equation (1) implies that $a_3 = 0$, but we already saw that that is impossible.

```
In[34]:= printNotebook["Metaclass_V.pdf"]
```